НЕПРЕРЫВНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КАК ИНСТРУМЕНТ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН

М.С. Сидоренко[1,2]
([1] Санкт-Петербург, ОАО “Радиоавионика”;
[2] Санкт-Петербургский государственный университет, Физический ф-т,
M-Sidorenko@yandex.ru)

THE CONTINUOUS WAVELET TRANSFORM AS THE TOOL FOR STUDYING THE WAVE PROPAGATION

M.S. Sidorenko

Математический аппарат непрерывного вейвлет-анализа возник во 2-й половине 80-х годов XX века (см., напр., [1],[2]), и представляет собой метод для исследования локальных частотных свойств сигнала, заданного как аналитически, так и в виде набора значений в фиксированных точках. Кроме того, вейвлет-анализ может быть использован для представления функции в виде суперпозиции семейства элементарных функций. Таким образом, непрерывный вейвлет-анализ можно рассматривать как обобщение Фурье-анализа.

При рассмотрении задач распространения волн, имеющих локализованный характер, разрывы или многомасштабную структуру, выгодно иметь инструмент, позволяющий рассматривать поле локально, в отличие от плоских волн, используемых в Фурье-преобразовании. Одним из примеров локальных инструментов для изучения волновых процессов является разложение по Гауссовым пучкам (см., напр., [3]). Применение методов непрерывного вейвлет-анализа к изучению волновых процессов впервые было продемонстрировано в [4]. В данном докладе представлены результаты, полученные совместно с М.В. Перель и Е. Городницким в [5-7], по использованию непрерывного вейвлет-преобразования при изучении волновых процессов, удовлетворяющих скалярному волновому уравнению. Все результаты допускают обобщение на случай уравнений Максвелла.

1. Пусть $u(\vec{r},t)$ - трёхмерное скалярное волновое поле в изотропном пространстве с положительными частотами и конечной энергией. Выберем локализованное осесимметричное решение волнового уравнения $\varphi(\vec{r},t)$, также обладающее положительными частотами и конечной энергией, а так же нулевым средним. Тогда поле $u(\vec{r},t)$ в любой момент времени может быть представлено в виде суперпозиции семейства элементарных решений $\varphi^{\nu}(\vec{r},t)$ по формуле:

$$u(\vec{r},t)=\frac{1}{C}\int_0^{2\pi}d\alpha\int_0^{\pi}d\beta\sin\beta\int_0^{\infty}\frac{da}{a^4}\int_{R^3}d\vec{b}\varphi^{\nu}(\vec{r},t)U(\nu)\text{, где } \nu=(a,\vec{b},\alpha,\beta),$$

семейство элементарных функций $\varphi^{\nu}(\vec{r},t)$ построено из $\varphi(\vec{r},t)$ по формуле

$$\varphi^{\nu}(\vec{r},t)=\frac{1}{a^{3/2}}\varphi\left(M(\alpha,\beta)\frac{\vec{r}-\vec{b}}{a},\frac{t}{a}\right),$$

матрица $M(\alpha,\beta)$ - матрица поворота оси симметрии $\varphi(\vec{r},t)$, а коэффициенты разложения $U(\nu)$ определяются как

$$U(\nu)=\int_{R^3}d\vec{r}u(\vec{r},t)\overline{\varphi^{\nu}(\vec{r},t)},$$

коэффициент C имеет вид:

$$C=\int_{R^3}d\vec{k}\frac{|\hat{\varphi}(\vec{k},0)|^2}{|\vec{k}|^3},$$

при этом коэффициенты разложения не зависят от времени. Поле $u(\vec{r},t)$ может быть, таким образом, представлено в виде суперпозиции семейства элементарных решений $\varphi^{\nu}(\vec{r},t)$ в произвольный момент времени. Предложенное разложение – точное.

2. Пусть волновое поле представлено в виде данных задачи Коши в фиксированный момент времени $t=0$: $u|_{t=0}=w(\vec{r}), \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=v(\vec{r})$. Тогда в любой другой момент времени мы также можем представить его в виде суперпозиции семейства элементарных решений по формуле

$$u(\vec{r},t)=\frac{1}{2C}\int_0^{2\pi}d\alpha\int_0^{\pi}d\beta\sin\beta\int_0^{\infty}\frac{da}{a^4}\int_{R^3}d\vec{b}\left\{\left[W(\nu)-aV(\nu)\right]\varphi^{\nu}(\vec{r},t)+\left[W(\nu)+aV(\nu)\right]\varphi^{\nu}(\vec{r},-t)\right\},$$

коэффициенты разложения W,V определяются по формулам

$$W(\nu)=\int_{R^3}d\vec{r}w(\vec{r})\overline{\varphi^{\nu}(\vec{r},0)},\ V(\nu)=\int_{R^3}d\vec{r}v(\vec{r})\overline{\chi^{\nu}(\vec{r},0)},$$

семейство решений χ^{ν} образовано из функции $\chi(\vec{r},t)=\int_0^t d\tau\varphi(\vec{r},\tau)$.

3. Если нас интересует развитие волнового поля только в какой-либо области пространства и на определённом масштабе, мы можем получить формулу для вейвлет-преобразования, зависящего от времени. Это позволяет изучать развитие многомасштабного волнового поля на разных масштабах независимо, без вычисления полного поля в каждый момент времени. Это преобразование вычисляется по формуле

$$U(a,\vec{b},\alpha,\beta,t)=\frac{1}{2}\int_{R^3}d\vec{r}w(\vec{r})\left[\overline{\varphi^{\nu}(\vec{r},t)}+\overline{\varphi^{\nu}(\vec{r},-t)}\right]+\frac{a}{2}\int_{R^3}d\vec{r}v(\vec{r})\left[\overline{\chi^{\nu}(\vec{r},t)}+\overline{\chi^{\nu}(\vec{r},-t)}\right].$$

4. В качестве элементарного решения $\varphi(\vec{r},t)$ можно использовать точное решение волнового уравнения, называемое Гауссов пакет. Оно было впервые получено в [8] и детально изучено в [9].

Литература

1. Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia, PA: SIAM. 1992
2. Antoine J. – P., Murenzi R., Vandergheynst P. and Ali S. T. Two- dimensional wavelets and their relatives. Cambridge: Cambridge University Press, UK. 2004
3. Babich V M and Popov M M. "Gaussian summation method(Review)" // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Radiofiz. 1989. 32. 1447-1466; English transl. 1990 Radiophys. Quantum Electron. 32 1063-1081)
4. Kaiser G. A Friendly Guide to Wavelets. Boston:Birkhauser. 1994.
5. Perel, M. V., and M. S. Sidorenko, 2007, New physical wavelet 'gaussian wave packet', J. Phys. A: Math. Theor., 40(13), 2007, 3441-3461.
6. Perel M.V., and Sidorenko M.S., Wavelet-based integral representation for solutions of the wave equation, J. Phys. A: Math. Theor. 42, 2009, 3752-63.
7. M. Perel, M. Sidorenko, E. Gorodnitskiy. Multiscale Investigation of Solutions of the Wave Equation. In: INTEGRAL METHODS IN SCIENCE AND ENGINEERING, VOLUME 2, 2010, 291-300
8. Kiselev A.P. and Perel M.V. Highly localized solutions of the wave equation. J. Math. Phys., 2000. Vol. 41(4). 1934-55
9. Perel M.V. and Sidorenko M.S. New physical wavelet 'Gaussian wave packet' Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2007. 40(13). 3441-3461